الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على صفحتين (الصفحة 4 من 5 والصفحة 5 من 5).

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

1) الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط A، B، C و D حيث:
$A(1;0;3)$، $B(1;2;4)$، $C(0;0;2)$ و $D(3;4;1)$.

أ) عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ ناظميا للمستوي (ABC).

ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) $z=2-x$ و $y=2z-2x-4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين (P) و (Q) على الترتيب.

أ) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ب) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

ج) احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ).

3) (S) سطح الكرة التي مركزها D و مماس للمستوي (Q) .

أ) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

ب) جد الطبيعة والعناصر المميّزة لتقاطع (P) و (S).

4) λ عدد حقيقي، G_λ نقطة من الفضاء حيث: $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^{\lambda}\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النبيري).

أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|$

ب) H مرجح الجملة $\{(A,2);(\mathrm{B},-1)\}$. اكتب $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$.

ج) عيّن مجموعة النقط G_λ لمّا يتغيّر λ في المجموعة $\mathbb{R}$.

د) جد قيمة λ التي تكون من أجلها G_λ منتصف القطعة $[CH]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) 1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

2) جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. النقط A، B، C، D و H لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث E النقطة التي تُحقّق: $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$.

1) اكتب z_H على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث BEC .

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=z_A z+z_B$.

أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD.

ج) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.

3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x-3y=8$ ، حيث x و y عددان طبيعيان.

أ) حلّ المعادلة (E).

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) .

- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

- عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

جـ) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاً α يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ: $2,79<\alpha<2,80$.

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

جـ) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذيْن معادلتيهما:

$x=1$ و $x=2$.

III) 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : u_k+u_{k+1}.

ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1+u_2+...+u_{2n}$.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (05 نقاط)		
1) أ. $\overrightarrow{AB}(0;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ و $\beta=2$.	0,50	
ب . $(ABC): 2x+y-2z+4=0$.	0,50	
2) أ . $\vec{n}\perp\vec{n}$ ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$.	0,25	
ب . $\begin{cases}x=t\\ y=-4t\ ;\ (t\in\mathbb{R})\\ z=2-t\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).	0,50	
جـ . المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) . لدينا: $d(D;(Q))=4$ و $d(D;(P))=\sqrt{2}$ ومنه $d((\Delta);D)=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$	0,75	
3) أ. معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S): $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4^2$.	0,25	
ب . إيجاد الطبيعة والخصائص المميزة لتقاطع المستوي (Q) وسطح الكرة (S) $d(D;(P))=\sqrt{2}<4$ إذن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من D إذن إحداثياتها تحقق $(3+t)+0(4)+(1+t)-2=0$ أي $t=-1$ وبالتالي $\omega(2;4;0)$ نصف قطرها : r يحقق $r=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}$ أي $r=\sqrt{14}$.	0,25 0,50 0,25	05
4) أ . المجموعة (Γ): $MG_0=MG_1$ ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_0G_1]$	0,25	
ب. كتابة $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$: $\overrightarrow{CG_\lambda}=\dfrac{1}{1+e^{\lambda}}\overrightarrow{CH}$.	0,25	
جـ . مجموعة النقط G_λ لما $\lambda\in\mathbb{R}$: لدينا $\lambda\in\mathbb{R}$ إذن $\dfrac{1}{1+e^{\lambda}}\in]0;1[$. مجموعة النقط هي قطعة المستقيم $[CH]$ باستثناء طرفيها C و H	0,25 0,25	
د. G_λ منتصف القطعة المستقيمة $[CH]$ معناه $\overrightarrow{CG_\lambda}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ أي $e^{\lambda}=1$ فيكون بذلك $\lambda=0$.	0,25	
التمرين الثاني : (04 نقاط)		
I) 1) حل المعادلة $z^2-2z+2=0$: $S=\{1-i;1+i\}$	0,50	01,50
2) إيجاد z_1 و z_2 : $z_1=i\sqrt{2}$ و $z_2=-i\sqrt{2}$	0,50	
II) 1) كتابة z_H على الشكل الأسي و استنتاج نوع المثلث BEC . $z_E=-1+i$ ، $z_H=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ، المثلث BEC متقايس الساقين $BC=BE$	0,25 0,25	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
2) أ. $z' = z_A z + z_B$ ، $\lvert z_A \rvert = \sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{z_B}{1-z_A} = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$	$0,50$ $0,50$	
ب. $CD = \lvert z_D - z_C \rvert = \lvert -2i \rvert = 2$ إذن مساحة الدائرة $4\pi\, ua$	$0,25$	$02,50$
جـ. (γ') هي الدائرة ذات المركز $C'\left(-\sqrt{2};0\right)$ صورة C ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ مساحتها $(4\pi)\left(\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi\, ua$	$0,50$ $0,25$	
3) مجموعة النقط (δ) حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما معناه قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MB}\right) = \pi + 2k\pi \ / k \in \mathbb{Z}$ إذن (δ) القطعة المستقيمة $[CB]$ باستثناء طرفيها B و C.	$0,50$	
<u>التمرين الثالث:</u> (04 نقاط)		
1) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 : $r \in \{1;3;4;5;9\}$	$0,50$	
دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 : $r' \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$	$0,75$	
ب. برهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $2\times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ تقبل القسمة على العدد 11. لدينا $2016 \equiv 3[11]$ إذن $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ و منه: $2\times 2016^{5n+4} \equiv 8[11] .....(1)$ لدينا $1437 \equiv 7[11]$ و منه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ أي: $1437^{10n+4} \equiv 3[11] .....(2)$ من (1) و (2) نجد : $2\times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$.	$0,25$ $0,25$ $0,25$	04
2) أ. مجموعة حلول المعادلة (E): $(x;y) = (3k+2;7k+2) \ ,k \in \mathbb{N}$	$0,50$	
ب. – القيم الممكنة للعدد d: $d \in \{1;2;4;8\}$. – تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$. $(x;y) = (24k'+20;56k'+44) \ ,k' \in \mathbb{N}$.	$0,50$ $0,50$	
جـ. $(x;y) = (30k+17;70k+37) \ ,k \in \mathbb{N}$.	$0,50$	
<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)		
I) أ. $\varphi(x) = e\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - 1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \mathbf{-1}$.	$0,25\times 2$	01
ب . اتجاه التغيّر : $\varphi'(x) = -(x-1)(x-2)e^{-x+1}$. الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$ الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$.	$0,25$ $0,25$	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
جدول تغيرات الدالة φ .	$0,25$	06
2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا α يختلف عن 1	$0,50$	
3) إشارة $\varphi(x)$.	$0,25$	
II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$0,25\times 2$	
ب) $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$. إشارة $f'(x)$: $\begin{array}{cccccc} -\infty & & \frac{3}{2} & & +\infty \\ & + & 0 & - & \end{array}$ الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. جدول التغيّرات	$0,25$ $0,25$ $0,25$	
2) المنحنيين (C_f) و (C_g)لهما نفس المماس (T) أي : $\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=1 \end{cases}$ و منه المنحنيين (C_f) و (C_g)لهما نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 $(T): y=x$	$0,25$ $0,25$	
3) رسم (T)و (C_f)	$0,50$	
4) أ) تبيان أنّ: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$	$0,25$	
ب. دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$: $\begin{array}{ccccccccc} -\infty & & \frac{1}{2} & & 1 & & \alpha & & +\infty \\ & - & 0 & + & 0 & + & 0 & - & \end{array}$ – الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g).	$0,25$ $0,25$	
جـ. الدالة: $\int_1^x f(t)\,dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$.	$0,25$	
د. المساحة : $\mathrm{A}=\int_1^2 (f(x)-g(x))\,dx=3-\dfrac{5}{e}-\ln 3$.	$0,25$	
III) 1) $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$ و $f'''(x)=-(2x-7)e^{-x+1}$ ، $f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$	$0,25$	
– التخمين: $f^n(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	$0,25$	
2) البرهان بالتراجع أنّ: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $f^n(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	$0,50$	
3) أ. حساب : $u_{k+1}+u_k=2(-1)^k$	$0,25$	
ب. $u_1+u_2+\cdots+u_{2n}=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})=-2n$	$0,25$	

ملاحظة: تقبل جميع الطرق الممكنة للحل.